سلسلة تمارين حول المتتاليات

التمرين الأول:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حيث : $u_3=9$ و $u_{10}=23$

1) أحسب الأساس و الحد الأول u_0 ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

2)هل العدد 2012 حد من حدود المتتالية؟

3)أحسب المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$

4)عين العدد n حتى يكون المجموع S_n مساويا 10200

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة: $8u_6=125u_9$ ($u_6\neq 0$)

1)أحسب الأساس q

2)نضع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ عين u_o علماأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=150$

3)عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث: $u_n<10^{-3}$

التمرين الثالث:

عين الأعداد الحقيقية a,b,c التي تحقق الشروط الآتية:

a,b,c بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية و b,c,a بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية و $a+b+c=30$

التمرين الرابع:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q حيث: $0<q<1$ و تحقق: $\begin{cases} u_2\times u_3\times u_4=64 \\ u_2^2+u_3^2+u_4^2=\dfrac{1456}{9} \end{cases}$

1)أوجد عبارة الحد العام u_n بدلالة n

2)أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$

التمرين الخامس:

المطلوب:البرهان بالتراجع على صحة القضايا التالية:

1)من أجل كل عدد طبيعي n : $2+7+12+...+(2+5n)=\dfrac{5n^2+9n+4}{2}$

2)من أجل كل عدد طبيعي يكون العدد $2\times 4^{3n+2}+3^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7

3)لتكن المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_1=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n^2+1)$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

بين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 و من الأعلى بالعدد 1

التمرين السادس:

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب : $v_o=\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ و $4v_{n+1}=v_n+9$

1)عين α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية ثابتة

نفرض في كل ما يأتي: $\alpha=4$

2)أحسب الحدود: v_1, v_2, v_3

3)نعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:من أجل كل عدد طبيعي n $u_n=v_n-3$

أ)بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب كتابة عبارة حدها العام u_n بدلالة n

ب)استنتج عبارة الحد العام v_n بدلالة n

ج)أحسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

د)أحسب المجموع: $\pi_n=u_0+4u_1+4^2u_{2...}+4^n u_n$

ه)أثبت أن $u_0\times u_1\times u_2...\times u_n=(\dfrac{1}{2})^{n(n+1)}$

التمرين السابع:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب : $u_o=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n+8}{2u_n+1}$.

1)أحسب الحدود : u_1 u_2 و u_3 .

2)مثل بيانيا الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) .ماذا تخمن عن تقارب المتتالية (u_n) ؟

3)لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+2}$ أحسب الحدود v_0 و v_1 و v_3 ثم بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب كتابة عبارة حدها العام بدلالة n .

4)أدرس تقارب المتتالية (u_n) .هل التخمين كان صحيحا؟

التمرين الثامن:

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$\begin{cases} u_0= 2 \\ u_{n+1}=\frac{3u_n+2v_n}{5} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0= 3 \\ v_{n+1}=\frac{2u_n+3v_n}{5} \end{cases}.$$

1)أحسب الحدود u_1 , u_2 , v_1 و v_2 .

2)نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $w_n=v_n-u_n$.برهن أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب كتابة عبارة حدها العام بدلالة n أحسب نهاية (w_n)

3)بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4)نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $t_n=u_n+v_n$ بين أن المتتالية (t_n) ثابتة و استنتج نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين التاسع:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_n=\int_n^{n+1} e^{-x+1}dx$

1)أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$

2)أحسب u_n بدلالة n

3)بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول u_0 و أساسها q

4)نضع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ أحسب S_n بدلالة n و بين أن $S_n=\int_0^{n+1} e^{-x+1}dx$

التمرين العاشر:

n عدد طبيعي غير معدوم.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود الموجبة و المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0= e^2 \\ u_n=\sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}} \end{cases}$

و لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n=\frac{1+lnu_n}{2}$

1)أكتب v_n بدلالة u_{n-1} ثم بدلالة v_{n-1}

2)استنتج طبيعة المتتالية (v_n) و عرف حدها الأول و أساسها

3)أكتب عبارة الحد العام (v_n) ثم u_n بدلالة n

4)أدرس تقارب المتتاليتين (u_n) و (v_n)

التمرين الحادي عشر:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$\begin{cases} u_0= 1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n-1}{2} \end{cases}$$

1)أحسب الحدود u_1 , u_2 و u_3

2)نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي ب: $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدو م عين قيمة العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية.

3)نضع الآن من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=u_n+1$ بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

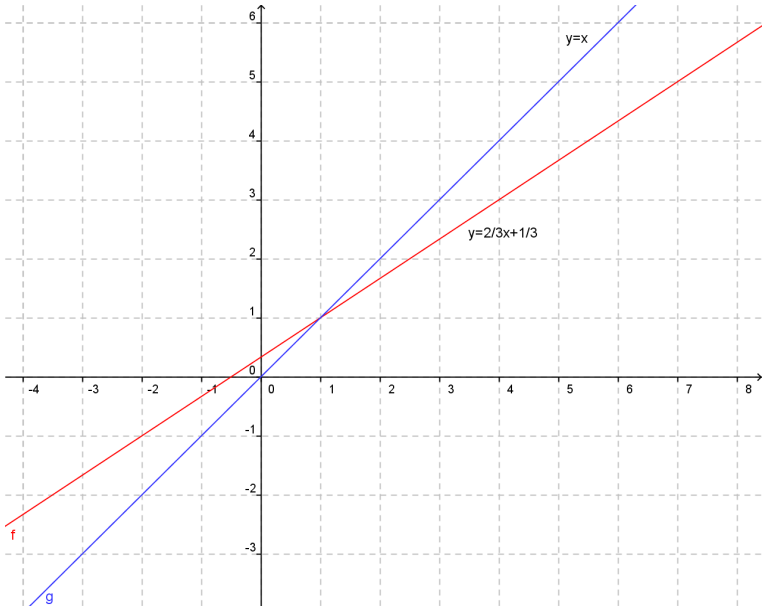
4)أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

5)أحسب المجموع $S_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ ثم استنتج المجموع $S'_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

6)نضع $\Pi_n=v_o^2+v_1^2+...+v_n^2$ أحسب نهاية Π_n لما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين الثاني عشر:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ مثلنا المستقيمين $(D):y=x$ و $(D'):y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$



نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب : $u_o=8$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1)أنقل الرسم ثم أنشئ على محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2,u_3

2)برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n\geqslant 1$

3)بين أن المتتالية (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

4)نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n=u_n-1$

أ)بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم كتابة عبارة حدها العام بدلالة n

ب)إستنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم بين أن المتتالية (u_n) متقاربة

ج)أحسب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ ثم استنتج المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

بالتوفيق

موقع الأستاذ الشامي: http://mathsefra.asrun.eu